Exercice 1 :

1) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1 • $f'_x(x,y) = (y-2)(x+y-6+x-1)$
$= (y-2)(2x+y-7)$

1 • $f'_y(x,y) = (x-1)(x+y-6+y-2)$
$= (x-1)(x+2y-8)$

On a :

1 $\begin{cases} * \ f'_x(4,2) = 0 \\ * \ f'_y(4,2) = 3(4+4-8) = 0 \end{cases}$

1 et $\begin{cases} * \ f'_x(2,3) = (4+3-7) = 0 \\ * \ f'_y(2,3) = (2+6-8) = 0 \end{cases}$

Donc $(4,2)$ et $(2,3)$ sont deux points critiques de f

2) Etudions les conditions du 2^e ordre :

0,5 $D(x,y) = [f''_{xy}(x,y)]^2 - [f''_{xx}(x,y)][f''_{yy}(x,y)]$

$* \ f''_{xx}(x,y) = 2(y-2)$

1,5 $* \ f''_{yy}(x,y) = 2(x-1)$

$* \ f''_{xy}(x,y) = 2x+y-7+y-2$
$= 2x+2y-9$

En $(4,2)$ on a :

$D(4,2) = (8+4-9)^2 - 0 = 9 > 0$

Donc f n'admet pas d'extrémum en $(4,2)$. Elle admet ici un point de selle (col). 1

3) en $(2,3)$:

$D(2,3) = (4+6-9)^2 - 4 = -3 < 0$

$f''_{xx}(2,3) = 2 > 0$ 1

Donc f admet en $(2,3)$ un minimum local.

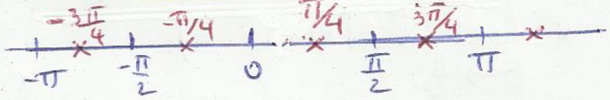
Exercice 2 :

1) domaine de définition :

$D_\rho = \{\theta \in \mathbb{R} : \cos 2\theta \neq 0\}$

$\cos 2\theta = 0 \iff 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ 1
$\iff \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

donc $D_\rho = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$



2) $* \ \rho(\theta+\pi) = \frac{1}{\cos(2\theta+2\pi)} = \frac{1}{\cos 2\theta} = \rho(\theta)$ 1/2

$\Rightarrow \rho$ est π-périodique
$\Rightarrow \Gamma$ est symétrique par rapport à l'origine O.
Il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π comme par ex: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{\pm\frac{\pi}{4}\}$ puis d'effectuer la symétrie % à O.

$* \ \rho(-\theta) = \frac{1}{\cos(-2\theta)} = \frac{1}{\cos 2\theta} = \rho(\theta)$ 1/2

$\Rightarrow \Gamma$ est symétrique % (Ox).

Finalement, pour obtenir Γ, il suffit de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}] - \{\frac{\pi}{4}\}$ puis d'effectuer la symétrie par rapport à (Ox), suivie de la symétrie par rapport à O. (Donc par rapport à (Oy)).

$$\text{Tracé sur } [0, \tfrac{\pi}{2}] - \{\tfrac{\pi}{4}\} \xrightarrow{\text{sym } \% (Ox)} \text{tracé sur } [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}] - \{\pm\tfrac{\pi}{4}\} \xrightarrow{\text{sym } \% O} \text{tracé sur } D_\rho$$

½ Donc le domaine d'étude sera

$$D_E = [0 ; \tfrac{\pi}{2}] - \{\tfrac{\pi}{4}\}$$

3) $* \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \rho(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos 2\theta} = \pm\infty$

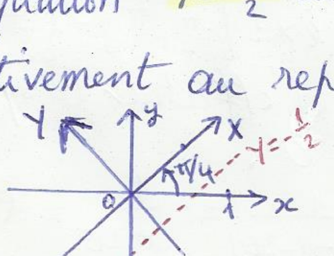
$* \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \rho(\theta) \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\theta - \pi/4)}{\cos 2\theta} : \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\theta - \pi/4)}{-2\sin 2\theta} \quad \text{(R. De l'Hospital)}$$

$$= \frac{\cos 0}{-2\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Λ Donc Γ admet en $\frac{\pi}{4}$, la droite d'équation $Y = -\frac{1}{2}$ comme asymptote relativement au repère (OXY)



Comme Γ est symétrique % à (Ox) et % à O, alors Γ est sym % à (Oy)

$\Rightarrow \Gamma$ admet 4 asymptotes : ce sont les droites $Y = -\frac{1}{2}$; $Y = \frac{1}{2}$, $X = \frac{1}{2}$ et $X = -\frac{1}{2}$ % OXY ½

<u>Remarque</u> : (Position relative de Γ par rapport à son asymptote en $\frac{\pi}{4}$)

$$Y = \rho(\theta)\sin(\theta - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{4})}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{\sin h}{\cos 2(h + \frac{\pi}{4})} \quad (h = \theta - \tfrac{\pi}{4})$$

$$= \frac{\sin h}{-\sin 2h} = \frac{\sin h}{-2\sin h \cos h} = -\frac{1}{2\cos h} \xrightarrow[h \to 0]{} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^-$$

Donc Γ est située en dessous de son asymptote au voisinage de $\frac{\pi}{4}$

4) <u>Etudions les variations de ρ sur $D_E = [0 ; \frac{\pi}{2}] - \{\frac{\pi}{4}\}$</u> :

$$\rho'(\theta) = \frac{2\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta}$$ ½

Sur D_E on a :

• $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\theta < \pi \Rightarrow \sin 2\theta > 0 \Rightarrow \rho'(\theta) > 0$

• $\theta \in \{0 ; \frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \rho'(\theta) = 0$

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	$+$	‖	$+$	0
ρ	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1

Λ

■ Etude des tangentes :

* en $M(\theta=0)$:

- $\rho(\theta=0)=1$
- $\tan V = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = "\dfrac{1}{0^+}" = +\infty$

$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2} \; [\pi]$

Donc Γ admet en $M(\theta=0)$, de coordonnées $(1,0)$, une tangente verticale.

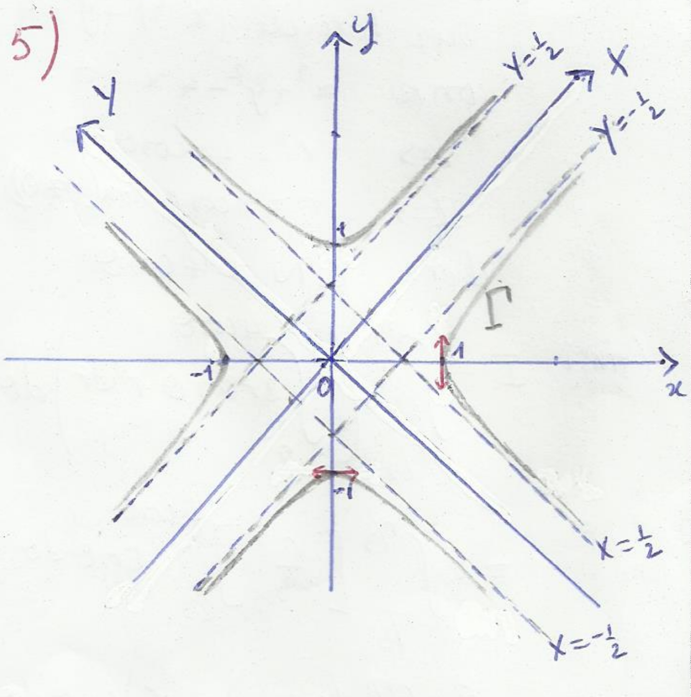
* en $M(\theta=\frac{\pi}{2})$:

- $\rho(\theta=\frac{\pi}{2}) = -1$
- $\tan v = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = "-\dfrac{1}{0^+}" = -\infty$

$\Rightarrow v = \frac{\pi}{2} \; [\pi]$

Donc Γ admet en $M(\theta=\frac{\pi}{2})$, de coordonnées $(0;-1)$, une tangente horizontale.

5)

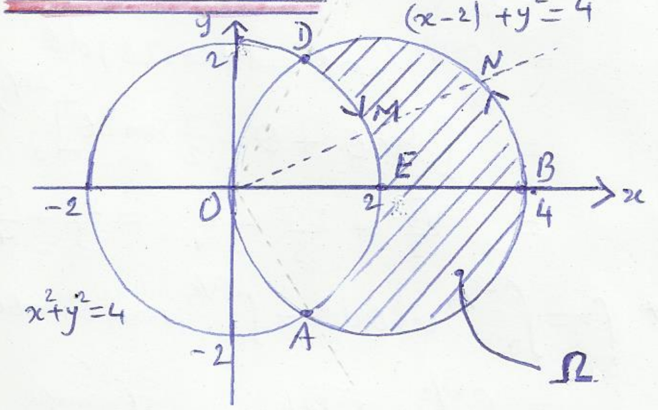


1/2

1/2

1,5

Exercice 3 :



1) a) $I = \oint_{(C)} \vec{V}\cdot\vec{dOM}$ $(C) = \partial\Omega$

$= \oint_{(C)} y^2 dx + (x^2+2xy)\, dy$

$I = \underbrace{\int_{\widehat{ABD}} y^2dx + (x^2+2xy)dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{\widehat{DEA}} y^2dx+(x^2+2xy)dy}_{I_2}$

■ $I_1 = \int_{\widehat{ABD}} y^2dx + (x^2+2xy)\,dy = \,?$

Sur $\widehat{ABD}$: $\begin{cases} x-2 = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} dx = -2\sin\theta d\theta \\ dy = 2\cos\theta d\theta \end{cases}$

θ variant de $-\frac{2\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$

$I_1 = \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{2\pi/3} 4\sin^2\theta(-2\sin\theta)d\theta + \left((2+2\cos\theta)^2 + 4(2+2\cos\theta)\sin\theta\right)2\cos\theta d\theta$

$= \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \Big[\underbrace{-8\sin^3\theta}_{\text{impaire}} + \overbrace{2\cos\theta(2+2\cos\theta)^2}^{\text{paire}} + \underbrace{8(2+2\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}_{\text{impaire}}\Big]\, d\theta$

$= 2\int_0^{2\pi/3} 2\cos\theta(2+2\cos\theta)^2 d\theta$

$= 16 \int_0^{2\pi/3} [\cos\theta + 2\cos^2\theta + \cos^3\theta\,]\,d\theta$

$= 16\,[\,\alpha + \beta\,]$ avec

1/2

1/2

1/2

1/2

$* \ \alpha = \int_0^{2\pi/3} (\cos\theta + 2\cos^2\theta)\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi/3} (\cos\theta + 1 + \cos 2\theta)\, d\theta$

$= \left[\sin\theta + \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi/3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$* \ \beta = \int_0^{2\pi/3} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi/3} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\sqrt{3}/2} (1-t^2)\, dt \qquad t = \sin\theta, \ dt = \cos\theta\, d\theta$

$= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Donc $I_1 = 16[\alpha + \beta]$

$= 16\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$

1/2

$= 32\frac{\pi}{3} + 10\sqrt{3}$

■ $I_2 = \int_{\widehat{DEA}} y^2 dx + (x^2 + 2xy)\, dy = ?$

Sur $\widehat{DEA}$: $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} dx = -2\sin\theta\, d\theta \\ dy = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}$

θ variant de $\frac{\pi}{3}$ à $-\frac{\pi}{3}$

$I_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} [4\sin^2\theta(-2\sin\theta) + (4\cos^2\theta + 8\cos\theta\sin\theta)\, 2\cos\theta]\, d\theta$

1/2

$= -\int_{-\pi/3}^{\pi/3} [\underbrace{\cancel{-8\sin^3\theta}}_{\text{impaire}} + \underbrace{8\cos^3\theta}_{\text{paire}} + \underbrace{\cancel{16\cos^2\theta\sin\theta}}_{\text{impaire}}]\, d\theta$

$= -16\int_0^{\pi/3} \cos^3\theta\, d\theta = -16\beta$

1/2

$= -16 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} = -6\sqrt{3}$

■ $I = I_1 + I_2 = 32\frac{\pi}{3} + 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

1/2

$= 32\frac{\pi}{3} + 4\sqrt{3}$

b) $I = \oint_{(C)} \underset{y^2}{P(x,y)}\, dx + \underset{x^2+2xy}{Q(x,y)}\, dy$

. P, Q : de classe C^1 sur (C) et à l'intérieur de (C)

. (C) est un chemin fermé simple

D'après le théorème de Green on a:

$I = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$

$= \iint_\Omega (2x + 2y - 2y)\, dx\, dy$

$= \iint_\Omega 2x\, dx\, dy$ 1/2

Passons aux coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Sur Ω : $\begin{cases} . \ \theta \text{ varie de } -\pi/3 \text{ à } \pi/3 \\ . \ r \text{ varie de } OM \text{ à } ON \end{cases}$

avec • $OM = 2$

• $ON = ?$

Sur le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 4$

on a $x^2 + y^2 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow r = 4\cos\theta$ ou $r = 0$

donc $ON = 4\cos\theta$

Ainsi $I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\int_2^{4\cos\theta} 2r\cos\theta\, r\, dr\right) d\theta$ 1/2

$= 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^{4\cos\theta} \cos\theta\, d\theta$

$= \frac{2}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (64\cos^3\theta - 8)\cos\theta\, d\theta$

$$I = \frac{4}{3}\int_0^{\pi/3} \left(64\cos^3\theta - 8\right)\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/3} \left(8\cos^4\theta - \cos\theta\right) d\theta$$

• $\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right]$

$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right]$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)$

$= \frac{1}{8}\left(3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta\right)$

$$I = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta - \cos\theta\right] d\theta$$

$= \frac{32}{3}\left[3\theta + 2\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta - \sin\theta\right]_0^{\pi/3}$ 1/2

$= \frac{32}{3}\left[\pi + \sqrt{3} + \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$= \frac{32}{3}\pi + 4\sqrt{3}$

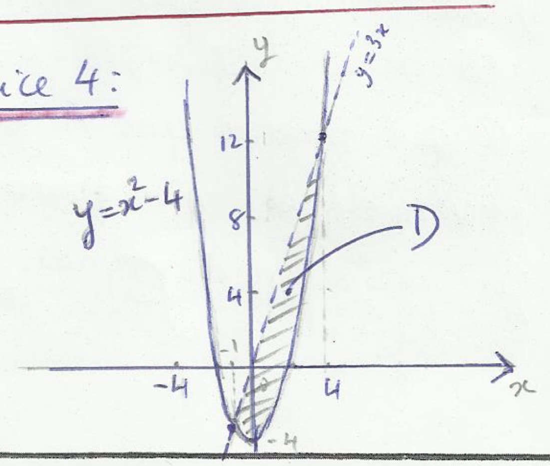
2) $\oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{OM} \neq 0$

Or (C) est un chemin fermé du plan $\mathbb{R}^2$. 1/2

On en déduit que $\vec{V}$ n'est pas un champ de gradients sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4:

1) 1



* intersection entre la parabole et la droite :

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 3x \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 4 \\ y = 12 \end{cases}$$

La parabole et la droite se coupent en $(-1,-3)$ et $(4,12)$.

* l'aire de D est

$$A = \iint_D dx\,dy$$ 1/2

$= \int_{-1}^{4}\left(\int_{x^2-4}^{3x} dy\right) dx$ 1/2

$= \int_{-1}^{4}\left(3x - x^2 + 4\right) dx$

$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{4}$ 1

$= 24 - \frac{64}{3} + 16 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - 4\right)$

$= \frac{125}{6}$ u.a.

2) La masse de la plaque D est

$$M = \iint_D \sigma(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (x+2)\,dx\,dy$$ 1/2

$= \int_{-1}^{4}\left(\int_{x^2-4}^{3x} dy\right)(x+2)\,dx$ 1/2

$= \int_{-1}^{4}\left(3x - x^2 + 4\right)(x+2)\,dx$

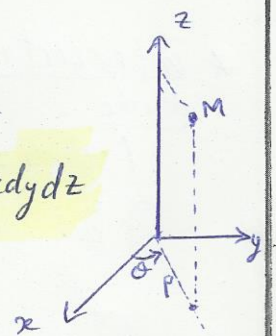
$= \int_{-1}^{4}\left(-x^3 + x^2 + 10x + 8\right) dx$

$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 5x^2 + 8x\right]_{-1}^{4}$ 1

$= -64 + \frac{64}{3} + 80 + 32 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 5 - 8\right)$

$= \frac{875}{12}$ u.m.

Exercice 5 :



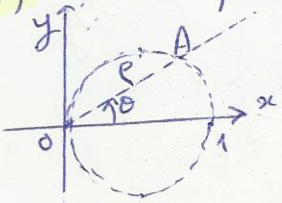
Le volume de Ω est donné par $V = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$ 1/2

Passons aux coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2 = \rho^2$$

* $x^2+y^2 = x \iff (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Donc la projection de Ω sur le plan Oxy est le disque de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.



* Sur Ω

- θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$
- Pour θ fixé, ρ varie de 0 à OA.
- Pour θ, ρ fixés, z varie de $-\sqrt{1-\rho^2}$ à $\sqrt{1-\rho^2}$

Sur le cercle $x^2+y^2=x$ on a $\rho^2 = \rho\cos\theta$
$\iff \rho = \cos\theta$ ou $\rho = 0$

donc $OA = \cos\theta$

2

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta}\left(\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} dz\right)\rho\,d\rho\right)d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta} 2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\right)d\theta$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{3}\left[(1-\rho^2)\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta$$

$$V = -\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sin^2\theta\sqrt{\sin^2\theta} - 1\right)d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^3\theta - 1\right)d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/2} d\theta\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\left(V_1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

* $V_1 = \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$ 2

$t = \cos\theta \Rightarrow dt = -\sin\theta\,d\theta$

$$V_1 = -\int_1^0 (1-t^2)\,dt$$

$$= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Donc le volume cherché est

$$V = -\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \quad u.v$$

Exercice 6 :

1) $N^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\1&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\1&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$ 1

$N^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\1&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} = O$

2) $(I-N)(I+N+N^2) = I + \cancel{N} + \cancel{N^2} - \cancel{N} - \cancel{N^2} - \cancel{N^3}$ 1
$= I$

3) On constate que $A = I - N$. 1
Or on a : $(I-N)(I+N+N^2) = I$
ce qui prouve que A est inversible et $A^{-1} = I + N + N^2$ 1,5

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\1&1&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\1&1&0\\2&1&1 \end{pmatrix}$$

4) $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1,5 $\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

---

5) $\begin{cases} x + my + mz = 1 & ① \\ -x + y = 0 & ② \\ -x - y + z = 1 & ③ \end{cases}$

② et ③ donnent : $\begin{cases} y = x \\ z = 1 + x + y = 1 + 2x \end{cases}$

Remplaçons dans ① :

1/2 $x + mx + m(1+2x) = 1$

$\Leftrightarrow (1+3m)x = 1 - m$

Discussion :

* si $1 + 3m = 0$ càd : $m = -\frac{1}{3}$

1/2 alors l'équation précédente est impossible. D'où le système n'admet pas de solution

* si $1 + 3m = 0$ càd $m = -\frac{1}{3}$

alors $\begin{cases} x = \dfrac{1-m}{1+3m} \\ y = x = \dfrac{1-m}{1+3m} \\ z = 1 + 2x = 1 + 2\left(\dfrac{1-m}{1+3m}\right) \end{cases}$

1 $= \dfrac{1+3m+2-2m}{1+3m}$

$= \dfrac{3+m}{1+3m}$

Dans ce cas le système linéaire admet un triplet solution unique, donné par

$\left(\dfrac{1-m}{1+3m} ; \dfrac{1-m}{1+3m} ; \dfrac{3+m}{1+3m}\right)$